**Выступление на РМО учителей математики 24.04.2025**

Здравствуйте, уважаемые коллеги!

«Хороших методов существует столько, сколько существует хороших учителей», — слова Д. Пойя отражают глубину и разнообразие подходов в преподавании математики. Теория и методика преподают не только математические знания, но и умение эффективно их передавать, развивая мышление и навыки решения задач.

Сегодня мы поговорим о, казалось бы, сложных вещах – об основах теории и методики преподавания математики. Но я постараюсь изложить всё максимально просто и понятно, чтобы это было полезно в нашей повседневной работе.

**Итак, что это вообще такое?**

Представьте себе, что вы хотите построить дом. Теория - это ваши знания о строительных материалах, о том, как работают законы физики, какие бывают типы фундаментов. Методика – это сам процесс строительства, выбор инструментов, последовательность действий, способы взаимодействия с рабочими.

В нашем случае, **теория** - это понимание математики как науки:

* **Почему математика работает?** (логика, аксиомы, доказательства)
* **Как устроены математические понятия?** (числа, фигуры, функции)
* **Какие цели мы преследуем, обучая математике?** (развитие мышления, формирование навыков решения задач, подготовка к жизни)

**Методика** – это практические приемы и подходы к обучению:

* **Как объяснить сложную тему просто и понятно?** (использование аналогий, примеров, наглядности)
* **Какие задачи использовать для закрепления материала?** (разноуровневые, практико-ориентированные, занимательные)
* **Как мотивировать учеников к изучению математики?** (игры, конкурсы, интересные проекты)
* **Как оценивать знания учеников эффективно?** (разные виды контроля, обратная связь)

На протяжении всей истории развития педагогики и теории обучения математике проблема **методов обучения** развивалась с разных точек зрения:

* + - с точки зрения форм деятельности;
    - с точки зрения логической структуры и функции форм деятельности;
    - с точки зрения характера познавательной деятельности учащихся.

Общая схема структуры системы методов обучения математике   
(по Манвелову С.Г.)

**Общие методы** разрабатываются дидактикой и адаптируются к обучению математике

**Специальные методы** разрабатываются методикой преподавания математики

**Нетрадиционные методы** зарождаются, как правило, в практике обучения.

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**Особенности содержания учебного материала и способов взаимодействия учителя и ученика при обучении математике, влияющие на построение системы методов**

Математическое содержание учебного предмета развивается главным образом посредством

* + - индукции,
    - дедукции,
    - обобщения.

Способы взаимодействия учителя и ученика выражаются через

* + - репродукцию,
    - эвристику,
    - исследование.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Математическая индукция** — метод [математического доказательства](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%B4%D0%BE%D0%BA%D0%B0%D0%B7%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE), который используется, чтобы доказать истинность некоторого утверждения для всех [натуральных чисел](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE). Для этого сначала проверяется истинность утверждения с номером 1 — ***база индукции***, а затем доказывается, что если верно утверждение с номером n, то верно и следующее утверждение с номером n+1 — ***шаг индукции***, или ***индукционный переход***.

(ПРИМЕР)

Математическая дедукция — **это метод рассуждения от общего к частному, от общих положений к частным заключениям**.  [1](https://task.cspu.ru/%D0%A4%D0%B0%D0%BA%D1%83%D0%BB%D1%8C%D1%82%D0%B5%D1%82%20%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B8%2C%20%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B8%20%D0%B8%20%D0%B8%D0%BD%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B8/%D0%90%D1%80%D1%85%D0%B8%D0%B2/3%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81/%D0%9E%D0%A4-313-086-5-1/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BA%D0%B0%20%D0%BE%D0%B1%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%20%D0%B8%20%D0%B2%D0%BE%D1%81%D0%BF%D0%B8%D1%82%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F_%D0%A1%D1%83%D1%85%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B01/Lekcia/Lek2.html)

Например, дедуктивный метод применяется в рассуждениях: «данная фигура является прямоугольником, так как у каждого прямоугольника диагонали равны, следовательно, и у данного прямоугольника диагонали равны».

(ПРИМЕР)

**Анализ и синтез в математике** — это методы исследования и обучения, которые используются при решении задач, доказательстве теорем и формировании математических понятий. [1](https://kopilkaurokov.ru/matematika/prochee/primenenie_pri_obuchenii_matematiki_metodov_nauchnogo_issledovaniia)

**Анализ** — метод исследования, при котором изучаемый объект мысленно или практически расчленяется на составные элементы (признаки, свойства, отношения). Каждый из этих элементов рассматривается отдельно как часть расчленённого целого. [1](https://kopilkaurokov.ru/matematika/prochee/primenenie_pri_obuchenii_matematiki_metodov_nauchnogo_issledovaniia)

**Синтез** — логический приём, с помощью которого отдельные элементы соединяются в целое. [1](https://kopilkaurokov.ru/matematika/prochee/primenenie_pri_obuchenii_matematiki_metodov_nauchnogo_issledovaniia)

**В математике** **под анализом** понимают рассуждение от неизвестного, от того, что требуется найти, к известному, к тому, что уже найдено или дано. [2](https://scienceforum.ru/2014/article/2014006570) **Анализ** является средством поиска решений, хотя доказательством, как правило, не является. [3](https://xn--80aaasqmjacq0cd6n.xn--p1ai/ru/theory/view/Teoriya-i-metodika-prepodavaniya-matematiki/Analiz-i-sintez-v-obuchenii-matematike/)

**Синтез** опирается на данные, полученные в результате анализа, и приводит к решению задачи. [3](https://xn--80aaasqmjacq0cd6n.xn--p1ai/ru/theory/view/Teoriya-i-metodika-prepodavaniya-matematiki/Analiz-i-sintez-v-obuchenii-matematike/)

ПРИМЕРЫ

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Интерактивные методы**

* Сущность интерактивных методов: обучение происходит во *взаимодействии и сотрудничестве* всех обучающихся, включая педагога.
* Эти методы предполагают сообучение (коллективное, кооперативное обучение).
* И обучающиеся, и педагог являются субъектами учебного процесса и педагог часто выступает лишь в роли организатора процесса обучения, создателя условий для инициативы учащихся.
* Интерактивное обучение основано на прямом *взаимодействии* учащихся со своим опытом и опытом своих друзей.

ПРАКТИКУМ

В заключение, хочу подчеркнуть ключевые выводы:

1. **Активное вовлечение учащихся – ключ к успеху:** Современная методика преподавания математики требует смещения акцента с простого изложения материала на создание условий для активной познавательной деятельности учащихся. Необходимо использовать проблемное обучение, проектную деятельность, практические задания и игровые элементы, чтобы стимулировать интерес к предмету и развивать навыки самостоятельного поиска решений.
2. **Визуализация и наглядность – наши лучшие помощники:** Математика – абстрактная наука, и для ее понимания требуется развитое визуальное мышление. Использование наглядных пособий, моделей, графиков, интерактивных инструментов значительно облегчает восприятие материала, помогает увидеть взаимосвязи и делает процесс обучения более эффективным и интересным.
3. **Постоянное самосовершенствование и обмен опытом – основа профессионального роста:** Преподавание математики – это динамичный процесс, требующий постоянного развития и адаптации.

Благодарю за внимание.

**Математическая индукция: Пример**

**Задача:** Доказать, что для любого натурального числа n, сумма первых n нечетных чисел равна n².

**Формально это записывается так:**

1 + 3 + 5 + … + (2n - 1) = n² для всех n ∈ ℕ

**Решение (с использованием метода математической индукции):**

**1. База индукции (проверка для n = 1):**

* Проверяем утверждение для самого маленького натурального числа, то есть для n = 1.
* Левая часть (1 + 3 + 5 + … + (2n - 1)) превращается просто в 1.
* Правая часть (n²) превращается в 1² = 1.
* Поскольку 1 = 1, утверждение верно для n = 1. **База индукции установлена.**

**2. Индукционное предположение (предположение о справедливости для n = k):**

* Предположим, что наше утверждение верно для некоторого натурального числа k. Это означает, что мы предполагаем, что:

1 + 3 + 5 + … + (2k - 1) = k² *Это наше предположение, которое мы будем использовать дальше.*

**3. Индукционный переход (доказательство справедливости для n = k+1):**

* Теперь нам нужно доказать, что если утверждение верно для n = k, то оно должно быть верно и для n = k+1. То есть, нам нужно показать, что:

1 + 3 + 5 + … + (2(k+1) - 1) = (k+1)²

* Давайте начнем с левой части этого уравнения и попробуем преобразовать её, используя наше индукционное предположение:
  + 1 + 3 + 5 + … + (2(k+1) - 1) = 1 + 3 + 5 + … + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) *(Мы просто выделили последний член суммы)*
  + = k² + (2(k+1) - 1) *(Теперь используем индукционное предположение, чтобы заменить 1 + 3 + 5 + … + (2k - 1) на k²)*
  + = k² + (2k + 2 - 1)
  + = k² + 2k + 1
  + = (k + 1)² *(Мы узнали квадрат суммы!)*
* Итак, мы показали, что:

1 + 3 + 5 + … + (2(k+1) - 1) = (k + 1)²

Это именно то, что мы хотели доказать! Мы показали, что если утверждение верно для n = k, то оно верно и для n = k+1. **Индукционный переход выполнен.**

**4. Вывод:**

* Поскольку мы установили базу индукции (утверждение верно для n=1) и доказали индукционный переход (если верно для n=k, то верно и для n=k+1), то, согласно принципу математической индукции, утверждение “1 + 3 + 5 + … + (2n - 1) = n²” верно для всех натуральных чисел n.

**Проще говоря:**

1. **Начинаем:** Проверяем, что всё работает для самого первого случая (n=1).
2. **Предполагаем:** Допустим, что это работает для какого-то числа (называем его k).
3. **Доказываем:** Показываем, что тогда это *обязательно* будет работать и для следующего числа (k+1).

Если всё это выполняется, значит, это работает для *всех* чисел! Представьте себе лесенку: вы встали на первую ступеньку, и знаете, что с каждой ступеньки можно перешагнуть на следующую. Значит, вы сможете подняться на любую ступеньку!

**Метод математической дедукции: Пример 2**

**Суть метода:** Выведение утверждений из общих, ранее установленных утверждений путем логических рассуждений.

**Пример:** Доказательство того, что сумма двух четных чисел есть четное число.

**1. Исходные положения (определения):**

* **Определение четного числа:** Четное число - это целое число, которое делится на 2 без остатка. Математически это можно записать как: число n является четным, если n = 2k, где k - целое число.

**2. Утверждение, которое нужно доказать (теорема):**

* Сумма двух четных чисел есть четное число.

**3. Доказательство (логическое рассуждение):**

* **Шаг 1:** Пусть a и b - два произвольных четных числа.
* **Шаг 2:** По определению четного числа, мы можем представить a и b в виде:
  + a = 2m, где m - целое число
  + b = 2n, где n - целое число
* **Шаг 3:** Рассмотрим сумму чисел a и b:
  + a + b = 2m + 2n
* **Шаг 4:** Вынесем общий множитель 2 за скобки:
  + a + b = 2(m + n)
* **Шаг 5:** Так как m и n - целые числа, то их сумма (m + n) также является целым числом. Обозначим (m + n) как k, где k - целое число.
* **Шаг 6:** Тогда, a + b = 2k
* **Шаг 7:** По определению четного числа, любое число, представимое в виде 2k, где k - целое число, является четным числом.
* **Шаг 8:** Так как a + b = 2k, то сумма a + b является четным числом.

**4. Вывод:**

* Сумма двух четных чисел есть четное число (теорема доказана).

**Объяснение логики дедукции в примере:**

Мы начали с общего определения четного числа. Затем, используя это определение и алгебраические преобразования, мы доказали, что сумма любых двух четных чисел удовлетворяет этому определению, и, следовательно, также является четным числом. Мы не рассматривали конкретные примеры четных чисел, а использовали только общее определение и правила алгебры. Это классический пример применения метода математической дедукции.

**. Решение уравнения (Анализ и синтез):**

* **Уравнение:** 2x + 5 = 11
* **Анализ:**
  + Уравнение с одной переменной (x).
  + Нужно найти значение x, при котором уравнение будет верным.
  + Уравнение состоит из сложения и умножения.
  + Необходимо “изолировать” x, выполняя обратные операции.
* **Синтез:**
  + Вычитание 5 из обеих частей уравнения: 2x + 5 - 5 = 11 - 5 => 2x = 6.
  + Деление обеих частей уравнения на 2: 2x / 2 = 6 / 2 => x = 3.
  + Проверка: 2 \* 3 + 5 = 6 + 5 = 11.

**5. Классификация геометрических фигур (Анализ и синтез):**

* **Задача:** Классифицировать различные четырехугольники (квадрат, прямоугольник, ромб, параллелограмм, трапеция).
* **Анализ:**
  + Выделение общих и отличительных признаков четырехугольников: количество сторон, параллельность сторон, равенство сторон, равенство углов, наличие прямых углов.
* **Синтез:**
  + Объединение четырехугольников в группы на основе общих признаков:
    - Параллелограммы: четырехугольники, у которых противоположные стороны параллельны.
    - Прямоугольники: параллелограммы, у которых все углы прямые.
    - Ромбы: параллелограммы, у которых все стороны равны.
    - Квадраты: прямоугольники, у которых все стороны равны (или ромбы, у которых все углы прямые).
    - Трапеции: четырехугольники, у которых только две стороны параллельны.
  + Построение иерархии четырехугольников: квадрат является частным случаем прямоугольника и ромба, которые являются частными случаями параллелограмма.

**В этих примерах анализ помогает выявить структуру задачи или свойства объекта, а синтез - найти решение или построить новый объект на основе анализа.** Оба процесса необходимы для глубокого понимания математики и успешного решения задач.

**Задача для учителей математики на практикуме по проблемному обучению в геометрии:**

**Тема:** “Параллельность прямых. Признаки параллельности прямых.” (7 класс)

**Задача:**

Представьте, что вы – главный архитектор города. Вам необходимо спроектировать новый микрорайон, в котором будут проложены улицы. Ваша задача – обеспечить, чтобы две улицы (улица Солнечная и улица Лунная) были идеально параллельны друг другу.

В вашем распоряжении есть следующие инструменты:

* **Транспортир:** Для измерения углов.
* **Линейка:** Для проведения прямых линий.

Но есть одно условие:

* Из-за плотной застройки вы не можете увидеть всю длину улиц Солнечная и Лунная целиком. Вы можете измерить и построить лишь небольшие отрезки этих улиц и углы, которые они образуют с одной общей улицей (улицей Звездной), которая пересекает обе проектируемые улицы.

**Вопросы для обсуждения и решения (для учителей):**

1. **Какую проблему нужно решить?** (Обеспечить параллельность улиц Солнечная и Лунная, имея ограниченные возможности для измерений).
2. **Какие знания необходимы для решения этой проблемы?** (Признаки параллельности прямых: равенство накрест лежащих углов, равенство соответственных углов, сумма односторонних углов равна 180 градусам).
3. **Какие измерения нужно провести, чтобы убедиться в параллельности улиц Солнечная и Лунная?** (Измерить углы, образованные улицами Солнечная и Лунная с улицей Звездной).
4. **Сколько углов необходимо измерить?** (Достаточно измерить два угла, например, накрест лежащие или соответственные).
5. **Как убедиться, что улицы идеально параллельны?** (Измеренные углы должны быть точно равны, или сумма односторонних углов должна быть точно равна 180 градусам).
6. **Если углы окажутся не совсем равны (из-за погрешности измерений), что делать?** (Внести корректировки в проект, чтобы углы стали равны, либо допустить небольшую погрешность в параллельности улиц).
7. **Предложите несколько вариантов расположения улицы Звездной по отношению к улицам Солнечная и Лунная.** (Улица Звездная может пересекать улицы Солнечная и Лунная под острым, прямым или тупым углом).
8. **Как вы представите эту задачу ученикам, чтобы она была интересной и мотивирующей?** (Например, можно использовать игровой сценарий с соревнованием между группами архитекторов).

**Цель задачи для учителей:**

* Актуализировать знания о признаках параллельности прямых.
* Продемонстрировать возможность создания проблемной ситуации на основе практической задачи.
* Показать, как можно организовать деятельность учащихся по самостоятельному поиску решения проблемы.
* Стимулировать творческое мышление и умение находить нестандартные решения.

**Возможные варианты реализации на уроке:**

1. **Работа в группах:** Ученики делятся на группы и получают задание спроектировать микрорайон, используя имеющиеся инструменты и знания.
2. **Использование интерактивных моделей:** Учитель может использовать интерактивные модели (например, GeoGebra) для визуализации задачи и проверки правильности решения.
3. **Практическая работа:** Ученики могут начертить улицы на бумаге, измерить углы и убедиться в параллельности прямых.
4. **Презентация проектов:** Каждая группа представляет свой проект микро